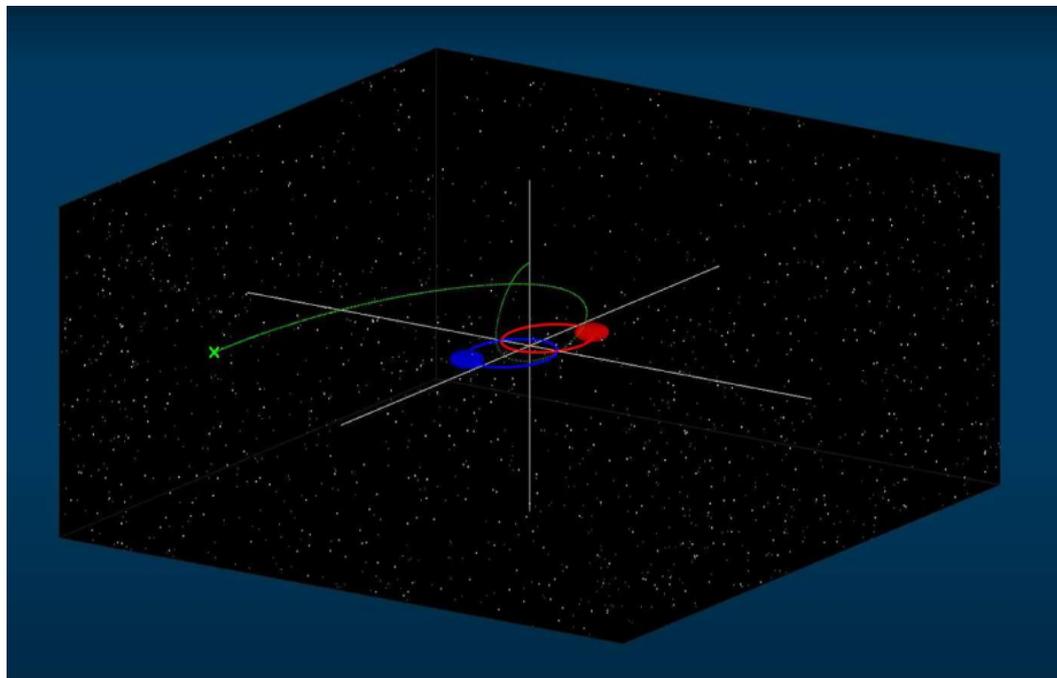


Université de Strasbourg
Télécom Physique Strasbourg
PROJET MATHS-INFO (PMI)
2nd Semestre
Groupe JZ2, sujet JZ5
FRONDE CÉLESTE



Travail effectué par :

Paul	SANDER
Luis	SANTOS
Philémon	TROUILLET
Felix	TOUCHTE CODJO

Sous la direction de : Jihad ZALLAT

Table des matières

1	Introduction	3
2	Problème à deux corps	4
2.1	Paramétrage du problème	4
2.2	Mise en équation	4
2.2.1	Étude théorique	4
2.2.2	Étude dynamique	11
2.2.3	Synthèse et comparaison des approches	15
2.3	Observations et interprétations	17
3	Problème à trois corps	25
3.1	Paramétrage du problème	25
3.2	Étude dynamique	25
3.3	Passage en 3D	29
3.4	Sauvons l'Enterprise	30

Chapitre 1

Introduction

Dans ce projet, nous avons tenté de comprendre et de modéliser l'évolution d'un système d'étoiles binaires. Pour cela, nous avons mis en équation le problème que nous avons abordé en CPGE, puis nous avons cherché à déterminer la trajectoire à long terme d'un vaisseau spatial qui apparaîtrait dans le champ gravitationnel de ces étoiles. Nous avons ensuite étudié les conditions permettant à ce vaisseau, que nous avons baptisé *Enterprise* en référence à la série *Star Trek*, d'échapper à ce système et ainsi à un sort funeste.

Chapitre 2

Problème à deux corps

2.1 Paramétrage du problème

Nous avons décidé de normaliser le problème de la façon suivante : l'unité de masse est la masse solaire ($1,98.10^{30} \text{ kg}$), l'unité de temps l'année terrestre ($31\,557\,600 \text{ secondes}$), l'unité de longueur est l'unité astronomique (UA , c'est-à-dire la distance Terre-Soleil $1,5.10^{11} \text{ m}$).

Nous avons dans un premier temps étudié le problème de deux étoiles de masses M_1 et M_2 qui sont en interaction gravitationnelle l'une avec l'autre. Initialement, à $t = 0$, les deux masses se trouvent aux points P_1 et P_2 de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , avec $x_2 < x_1$. Le centre de masse de ce système est situé au point C de coordonnées (x_C, y_C) . Par la suite, dans un souci de simplification de la mise en équation du problème, nous avons fixé ce point comme origine du repère. Nous poserons dans la suite $\vec{l} = \overrightarrow{P_1P_2}$.

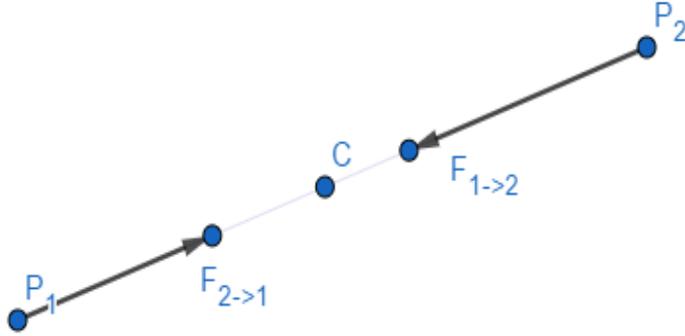
2.2 Mise en équation

2.2.1 Étude théorique

Par définition du centre de masse, on a : $M_1\overrightarrow{CP_1} + M_2\overrightarrow{CP_2} = \vec{0}$. Plaçons nous dans un référentiel centré en O , que l'on supposera galiléen¹. D'après le *principe fondamental de la dynamique* (PFD) :

$$\begin{aligned} M_1 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OP_1} &= \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} \\ M_2 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OP_2} &= \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} &= -\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \end{aligned}$$

1. Il faudrait poser la question de l'existence d'un tel référentiel. Toutefois, dans notre système solaire, le référentiel de Copernic en est une bonne approximation.



donc :

$$\begin{aligned}
 \vec{0} &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\
 &= \frac{d^2}{dt^2} (M_1 \vec{OP}_1 + M_2 \vec{OP}_2) \\
 &= \frac{d^2}{dt^2} ((M_1 + M_2) \vec{OC} + (M_1 \vec{CP}_1 + M_2 \vec{CP}_2)) \\
 &= \frac{d^2}{dt^2} (M_1 + M_2) \vec{OC} \\
 &= \frac{d^2}{dt^2} \vec{OC}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Le point C est donc animé d'un *mouvement rectiligne uniforme*. On peut donc considérer le référentiel centré en ce point comme galiléen. On le notera \mathcal{R}_g .

Dans \mathcal{R}_g , on peut montrer que le problème se résume à l'étude du mouvement d'un point fictif M de masse $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ soumis à l'action gravitationnelle de la masse totale de notre système $M_{tot} = M_1 + M_2$ alors placée au point C . Ceci s'obtient en posant :

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{CP_1}, \quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{CP_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{CM}$$

Le retour à \vec{r}_1 et \vec{r}_2 s'effectue via les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 = -\frac{M_2}{M_1+M_2} \vec{r} = k_1 \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \frac{M_1}{M_1+M_2} \vec{r} = k_2 \vec{r} \\ k_1 = -\frac{M_2}{M_1+M_2} = -\frac{M_2}{M_{tot}} \\ k_2 = \frac{M_1}{M_1+M_2} = \frac{M_1}{M_{tot}} \end{array} \right.$$

On montre ainsi que \vec{r} (c'est-à-dire le point fictif M) est animé d'un mouvement plan et elliptique dont l'un des foyers est C . En effet, en utilisant les coordonnées polaires (r, θ) dans le plan du mouvement $(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0)$ puis en posant $u = \frac{1}{r}$, on montre que le système évolue suivant l'équation différentielle :

$$\frac{d^2}{d\theta^2} u + u = \frac{GM_{tot}}{C^2}$$

où $C = r_0^2 \dot{\theta}_0$ est la constante des aires. et G la constante de gravitation universelle. Avec les unités de mesures que nous nous sommes fixés, G vaut approximativement $39,1 UA^3 \cdot (masse_soleil)^{-1} \cdot an^{-2}$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$u(\theta) = A \cos(\theta + \phi) + \frac{GM_{tot}}{C^2}$$

D'où :

$$r(\theta) = \frac{1}{A \cos(\theta + \phi) + \frac{GM_{tot}}{C^2}} = \frac{\frac{C^2}{GM_{tot}}}{1 + A \frac{C^2}{GM_{tot}} \cos(\theta + \phi)}$$

On reconnaît ainsi l'équation d'une conique² de paramètre $p = \frac{C^2}{GM_{tot}}$

et d'excentricité $e = Ap$.

Poursuivons la résolution du problème en exprimant les constantes A et ϕ en fonction des conditions initiales. En coordonnées polaires, nous avons, à $t = 0$, $\vec{u}_r = \vec{u}_x$ et $\theta_0 = 0$ donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = |r_{2,0} - r_{1,0}| = x_1 - x_2 \\ \dot{r}_0 = \dot{r}_{2,0} - \dot{r}_{1,2} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

2. Il existe plusieurs définitions à cette équation. Nous adoptons ici, la forme $r = \frac{p}{1+e \cos(\theta+\phi)}$

Par la transformation $u = 1/r$, on a aussi :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{r_0} = \frac{1}{x_1 - x_2} \\ \dot{u}_0 = -\frac{\dot{r}_0}{r_0^2} = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{(x_2 - x_1)^2} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} A \cos(\phi) + p^{-1} = \frac{1}{x_1 - x_2} \\ -A \dot{\theta}_0 \sin(\phi) = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{(x_2 - x_1)^2} \end{cases}$$

soit

$$Ae^{j\phi} = \frac{1}{x_1 - x_2} - p^{-1} - j \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{\dot{\theta}_0 (x_2 - x_1)^2} =: z \quad (2.3)$$

Or, par définition : $0 < e = pA > 0$ donc $A > 0$ car $p > 0$. Donc :

$$\begin{cases} A = |z| \\ \phi = \arg(z) - \arg(A) = \arg(z) \end{cases}$$

Cette forme permet une implémentation MATLAB plus aisée, mais à partir des notations de l'équation 2.10, nous avons une écriture plus lisible de e :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\frac{1}{x_1 - x_2} - p^{-1}\right)^2 + \frac{(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2}{\dot{\theta}_0^2 (x_2 - x_1)^4}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{r_0} - p^{-1}\right)^2 + \frac{\dot{r}_0^2}{\dot{\theta}_0^2 r_0^4}} \\ e &= pA \\ &= p \sqrt{\left(\frac{1}{r_0} - p^{-1}\right)^2 + \frac{\dot{r}_0^2}{\dot{\theta}_0^2 r_0^4}} \\ e &= \sqrt{\left(\frac{p}{r_0} - 1\right)^2 + \frac{p^2 \dot{r}_0^2}{\dot{\theta}_0^2 r_0^4}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\boxed{e = \sqrt{\left(\frac{p}{r_0} - 1\right)^2 + \frac{p^2 \dot{r}_0^2}{\dot{\theta}_0^2 r_0^4}}}$$

Cette nouvelle expression de e va nous permettre de déterminer la nature de la conique $r(\theta)$. On a³ :

3. Sur le plan énergétique, on montre que ces conditions correspondent respectivement à une énergie mécanique \mathcal{E}_m inférieure, égale et supérieure à 0.

- si $e < 1$, alors la conique est une ellipse ;
- si $e = 1$, alors la conique est une parabole ;
- si $e > 1$, alors la conique est une hyperbole.

A cette étape, nous pouvons affirmer que la trajectoire du point fictif est entièrement déterminée. Puisque \vec{r}_1 et \vec{r}_2 sont proportionnels à \vec{r} , on peut écrire :

$$r_i = \frac{p_i}{1 - e_i \cos(\theta + \phi)} = |k_i| r = \frac{|k_i| p}{1 - e \cos(\theta + \phi)}$$

d'où, par identification :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad p_i = |k_i| p \quad \text{et} \quad e_i = e$$

L'excentricité reste inchangée !

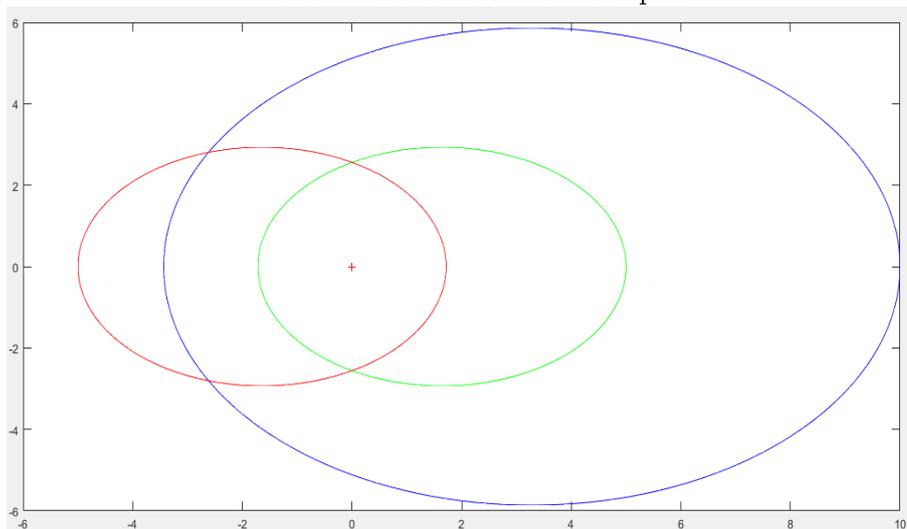
Avec ces résultats, nous pouvons implémenter sur MATLAB les fonctions $r(\theta)$, $r_1(\theta)$ et $r_2(\theta)$ et tracer les trajectoires exactes en fonctions des conditions initiales. Une fois les trajectoires tracées, nous pourrons remonter aux demi-grands axes théoriques et aux périodes grâce à la troisième loi de Képler. *Les deux corps décrivent une ellipse dont l'un des foyers est le centre de masse.* Nous nous proposons dans la sous-section 3, de montrer la cohérence de ces résultats à partir d'une approche numérique qui sera décrite dans la sous-section suivante. En attendant, voici ce que l'on obtient avec les conditions initiales de la figure 2.1 :

FIGURE 2.1 – Conditions Initiales

```
%définition système
M1 = 1;
alpha = 1;
M2 = alpha*M1;
M_tot = M1 + M2;
G = 39.1;
%fin définition système

%conditions initiales
xc = 0;
x1 = 5; %x1 > 0
x2 = -M1*x1/M2; %x2 sachant xc centre de masse de x1 et x2
%composantes radiales et tangentielles des vitesses à t = 0
vr1 = 0;
vt1 = 1;
vr2 = 0;
vt2 = -1; %Attention vt1 != vt2 (pour la bonne def de dtheta0)
%fin composantes radiales et tangentielles des vitesses à t=0
r0 = x1 - x2;
dr0 = vr1 - vr2;
vt0 = vt1 - vt2;
theta0 = 0;
dtheta0 = vt0/r0;
X = [r0 dr0 vt0 theta0 dtheta0];
%fin conditions initiales
```

FIGURE 2.2 – Tracé des ellipses



Les tracés de r, r_1, r_2 sont respectivement en bleu, vert et rouge.

FIGURE 2.3 – Caractéristiques des ellipes

```

Le demi grand axe de l'ellipse 1 vaut : 3.359107
Le demi grand axe de l'ellipse 2 vaut : 3.359107
Le paramètre p de l'ellipse 1 vaut : 2.557545
Le paramètre p de l'ellipse 2 vaut : 2.557545
L'excentricité du système vaut : 0.488491
La période de révolution de l'astre 1 vaut : 4.374336
La période de révolution de l'astre 2 vaut : 4.374336
le complexe z vaut : -0.095500
phi vaut : 3.141593
x >>

```

Puisque C , centre de masse du système et origine du repère, est l'un des foyers de nos différentes ellipses, nous avons :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad a_i = \frac{r_i(\theta = 0) + r_i(\theta = \pi)}{2} = |k_i| \frac{r(\theta = 0) + r(\theta = \pi)}{2} = |k_i|a$$

soit :

$$a = \frac{r(\theta = 0) + r(\theta = \pi)}{2} \quad (2.5)$$

et :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad a_i = |k_i|a \quad (2.6)$$

D'après la troisième loi de Képler, on a :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{tot}} \quad (2.7)$$

donc :

$$T = \sqrt[2]{\frac{4\pi^2}{GM_{tot}} a^3} \quad (2.8)$$

De même, pour P_i :

$$T_i = \sqrt[2]{\frac{4\pi^2}{GM_{tot}} a_i^3} = \sqrt[3/2]{|k_i|} T \quad (2.9)$$

2.2.2 Étude dynamique

Dans cette partie, nous étudierons l'évolution du système numériquement à l'aide des lois de la physique et à partir de la seule donnée des conditions initiales⁴. D'après le PFD :

$$\begin{cases} M_1 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_1}}{dt^2} = \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} = -\frac{GM_1 M_2 \overrightarrow{P_2 P_1}}{\|\overrightarrow{P_2 P_1}\|^3} \\ M_2 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_2}}{dt^2} = \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = -\frac{GM_2 M_1 \overrightarrow{P_1 P_2}}{\|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^3} \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{cases} = -\frac{GM_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \begin{cases} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{cases} = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \begin{cases} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{cases}$$

Pour notre implémentation numérique, nous considérerons le vecteur d'état X défini ci-dessous :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = f(t, X)$$

4. D'où l'appellation d'étude dynamique.

avec :

$$f(t, Z) = \begin{pmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ \frac{K_1}{\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_3-e_4)^2}}(e_1 - e_2) \\ \frac{K_1}{\sqrt{(e_2-e_2)^2+(e_3-e_4)^2}}(e_3 - e_4) \\ \frac{K_2}{\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_3-e_4)^2}}(e_2 - e_1) \\ \frac{K_2}{\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_3-e_4)^2}}(e_4 - e_3) \end{pmatrix}$$

où :

$$K_1 = -GM_2, \quad K_2 = -GM_1, \quad Z = {}^t(e_1, e_2, \dots, e_8)$$

Nous obtenons une équation différentielle vectorielle d'ordre 1 :

$$\dot{X} = f(t, X)$$

Pour résoudre cette équation différentielle, nous avons mis en place deux méthodes d'intégration : *le schéma d'Euler* et *la méthode de Runge Kutta d'ordre 4* et nous avons pu mettre en évidence la différence d'efficacité de précision entre les deux méthodes.

Schéma d'Euler

Le schéma d'Euler repose sur le *développement de Taylor* à l'ordre 1 de la fonction $X(t)$. Ayant choisit un pas d'intégration dt , on écrit :

$$X(t + dt) = X(t) + dt \dot{X}(t)$$

Les conditions initiales du système stellaire nous permettent de définir le vecteur d'état initial X_0 . La simulation consiste, à partir d'une durée de simulation totale donnée T , à calculer les différents vecteurs $X(n \cdot dt)$ pour $0 \leq n \leq T/dt$ et à les représenter.

Soient les conditions initiales suivantes pour P_1 et P_2 respectivement en $x_1 = 5 > -5 = x_2$ sur l'axe des abscisses et animés des vitesses $\dot{x}_1 = 1$ et $\dot{x}_2 = -1$ suivant l'axe \vec{u}_y :

$$X_0 = {}^t(5 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0)$$

Pour $M_1 = M_2 = 1$ (le point C est bien l'origine du repère) et pour les valeurs $dt = 0.1, 0.01$ et 0.001 nous obtenons les figures ci-dessous (au-delà, nos ordinateurs n'arrivent plus à effectuer les calculs et le programme s'arrête!).

FIGURE 2.4 – $dt = 0.1$ et duree = 15

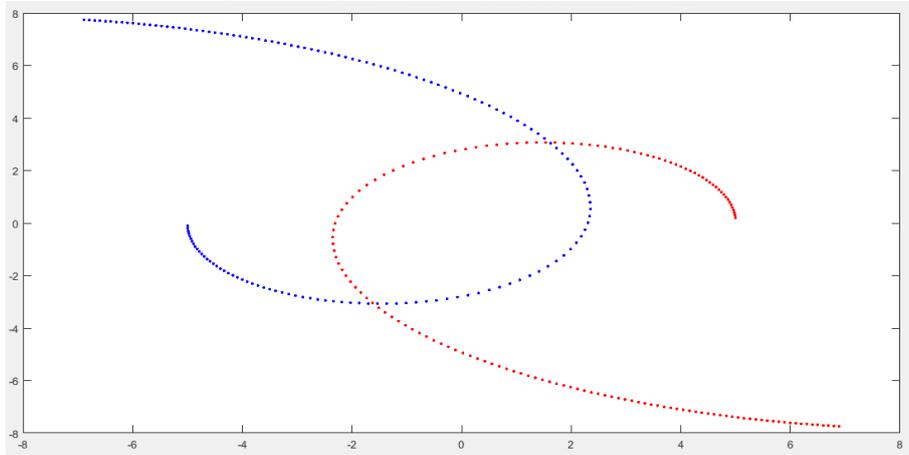


FIGURE 2.5 – $dt = 0.01$ et duree = 15

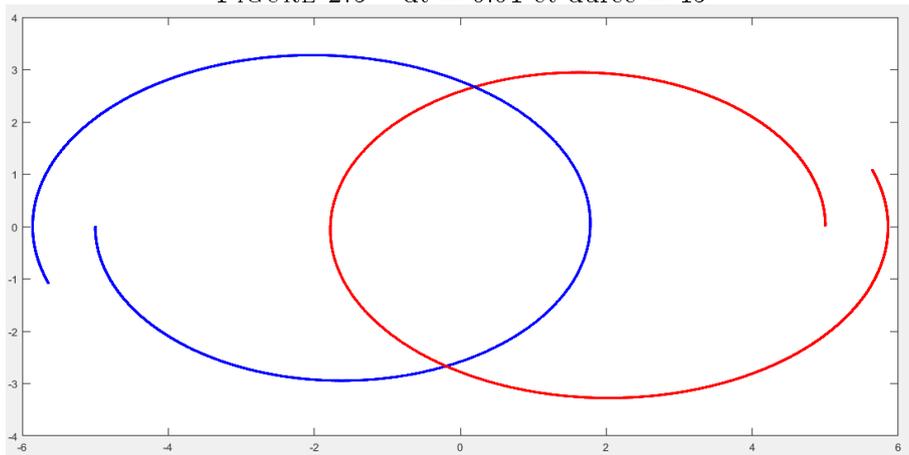
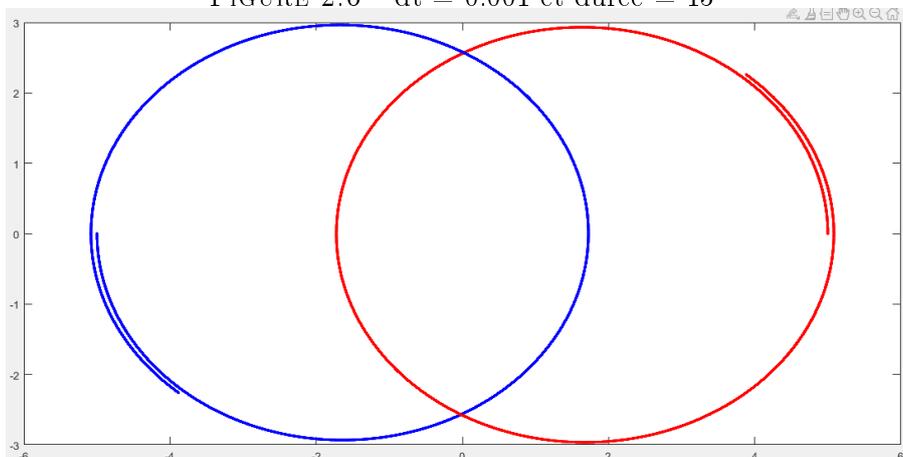


FIGURE 2.6 – $dt = 0.001$ et durée = 15



Méthode de Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta (RK) repose sur la version intégrale de l'équation différentielle. Sur une durée totale T d'intégration, pour un pas d'intégration $dt = h$, on calcule les $X_n = X(n.h)$, $\forall 0 \leq n \leq T/h$. On écrit :

$$X_{n+1} - X_n = \int_n^{n+1} \dot{X}(t) dt$$

On utilise alors des méthodes dites de quadratures pour approximer l'intégrale : $\int_n^{n+1} \dot{X}(t) dt$. RK est une méthode dite à *un pas*, elle permet d'écrire :

$$X_{n+1} - X_n = h \cdot \Phi(t, X_n, h)$$

De façon générale, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) consiste à écrire la fonction $\Phi(t, y, h)$ sous la forme :

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{6}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$$

avec :

$$\begin{cases} P_1(t, y, h) = f(t, y), \\ P_2(t, y, h) = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}P_1(t, y, h)), \\ P_3(t, y, h) = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}P_2(t, y, h)), \\ P_4(t, y, h) = f(t + h, y + hP_3(t, y, h)). \end{cases}$$

En reprenant les mêmes conditions initiales de la section précédente, nous avons obtenu pour les valeurs $dt = 0.1$ et 0.01 les figures ci-dessous.

FIGURE 2.7 – $dt = 0.1$ et duree = 15

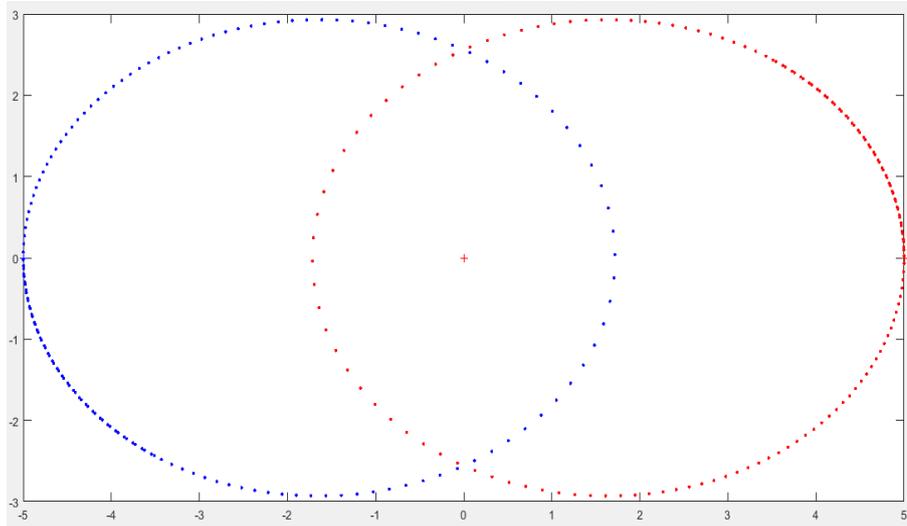
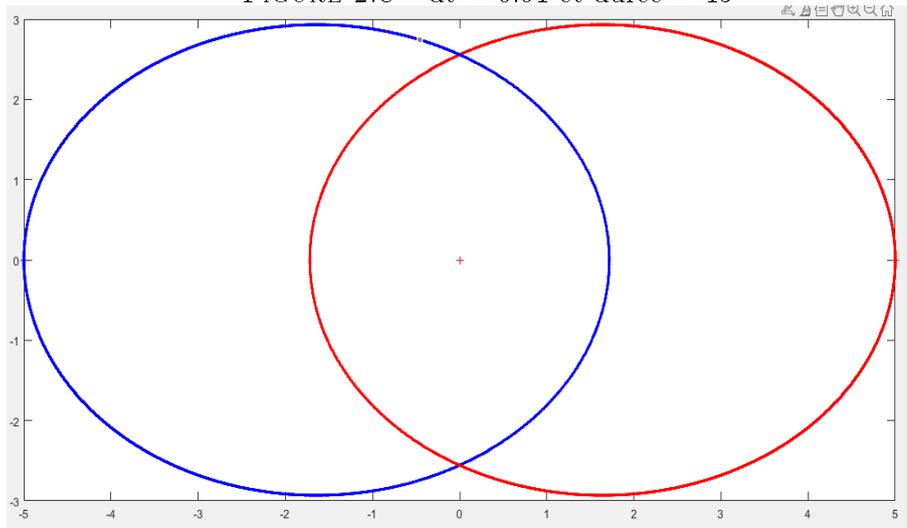


FIGURE 2.8 – $dt = 0.01$ et duree = 15

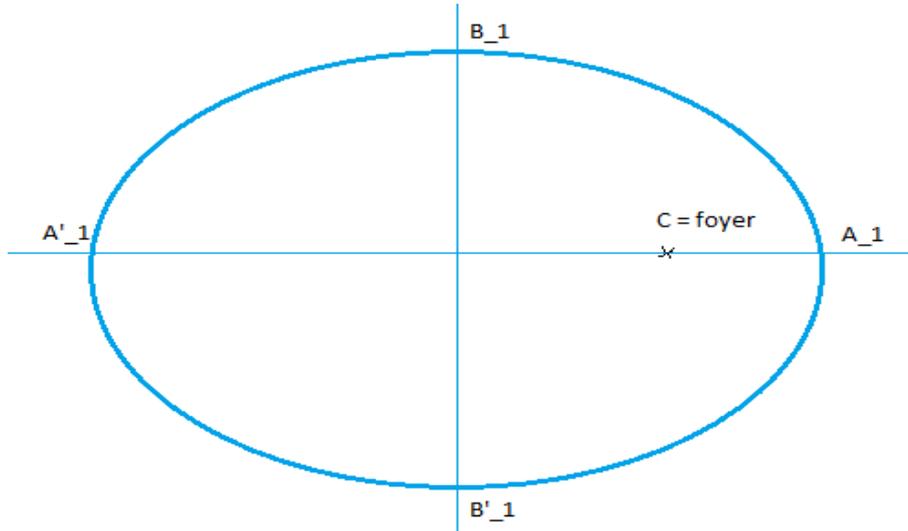


Il est inutile de réduire davantage le pas d'intégration : Runge-Kutta a montré sa supériorité !

2.2.3 Synthèse et comparaison des approches

Désormais, nous allons montrer la cohérence des deux approches (théorique et dynamique) en comparant leurs résultats sur un exemple. Nous nous proposons de déterminer les caractéristiques de l'ellipse tracée par Runge-

Kutta pour les comparer à celles prédites par la théorie. Nous vous invitons à vous rappeler des résultats de la figure 2.3.



Supposons lancée la simulation MATLAB. Pour remonter au demi-grand axe de l'astre 1, il faudrait déterminer l'abscisse du point A'_1 en supposons A_1 comme étant la position initiale. Au fur et à mesure des intégrations succesives, nous avons retenu la différence $x_1 - x'_1$ et la comparant avec son ancienne valeur afin de déterminer son maximum : à ce maximum correspondra donc la meilleur approximation du point A'_1 que nous ayons. Dans ce cas, le demi-grand axe vaudra approximativement : $a = \frac{x_1 - x'_1}{2}$

Pour remonter un demi-petit axe, on cherche le point qui approxime le mieux B_1 . Il correspond au point avec la plus grande ordonnée. On se permet ensuite de recourir aux formules ci-dessous pour obtenir l'excentricité et le paramètre :

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}$$

Lorsqu'on applique tout ça au point P_1 de notre étude avec les mêmes conditions initiales de la figure 2.1. on obtient le tableau comparatif suivant :

	demi-grand axe a	paramètre p	excentricité e	période T
valeur théorique	3.359107	2.557545	0.488491	4.374336
valeur simulée	3.359095	2.557549	0.488487	...

Nous obtenons des résultats surprenants ! Nous pouvons ainsi conclure que les méthodes sont parfaitement cohérentes. La simulation possède l'avantage de présenter directement la dynamique du mouvement. Par la suite

nous utiliserons essentiellement l'approche numérique pour rendre compte des phénomènes gravitationnels..

2.3 Observations et interprétations

Dans la section précédente nous avons su mettre en place un outil de résolution des problèmes gravitationnels (la méthode de *Runge-Kutta*). Nous nous proposons maintenant de présenter des conditions nécessaires à la stabilité d'un système gravitationnel à deux corps. L'étude théorique nous a enseigné que, suivant la valeur de l'excentricité, nos deux corps pouvait décrire soit des ellipses, soit des paraboles, soit des hyperboles. La simulation nous a permis de différencier les systèmes stables des systèmes instables. Nous avons même observé des régimes transitoires et défini une nouvelle notion : **l'excentricité temporelle relative au mouvement d'un corps stellaire**. Reprenons l'expression cette expression de l'excentricité :

$$e = \frac{r_0^3 \dot{\theta}_0^2}{GM_{tot}} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{\dot{\theta}_0^2 r_0^2}}$$

avec :

$$\begin{cases} r_0 &= |r_{2,0} - r_{1,0}| &= x_1 - x_2 \\ \dot{r}_0 &= \dot{r}_{2,0} - \dot{r}_{1,2} &= \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_0 &= \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{r_0} \end{cases} \quad (2.10)$$

Limitons nous pour le moment au cas des vitesses initiales tangentielles, c'est-à-dire parallèles à \vec{u}_y . Dans ce cas, nous avons $\dot{r}_0 = 0$ et :

$$e = \sqrt{\left(\frac{p}{r_0} - 1\right)^2} = \left|\frac{p}{r_0} - 1\right| = \left|\frac{1}{r_0} \frac{C^2}{GM_{tot}} - 1\right| = \left|\frac{1}{r_0} \frac{r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{GM_{tot}} - 1\right| = \left|\frac{(x_1 - x_2)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2}{GM_{tot}} - 1\right| \quad (2.11)$$

$$e = \left|\frac{(x_1 - x_2)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2}{GM_{tot}} - 1\right| \quad (2.12)$$

Interprétons cette expression de l'excentricité.

Premier cas : l'excentricité est strictement inférieure à 1

Pour $e < 1$, nous sommes venus à la conclusion que, pour obtenir un système *stable*, les vitesses initiales devaient être de sens opposés et être dans le rapport :

$$M_1 v_1 = M_2 v_2$$

On observe aussi les système *pseudo-stable* qui sont des systèmes stables en translation permanente, on les observe facilement lorsque les vitesses sont de sens opposés alors que leurs normes sont dans un mauvais rapport de masse. On peut aussi les observer dans le cas des vitesses colinéaires et de mêmes sens.

Les caractéristiques du système à $t = 0$ inscrites dans les deux premiers tableaux ci-dessous correspondent à des systèmes stables alors que les autres correspondent à des systèmes pseudo-stables et instables⁵.

x_1	x_2	\dot{y}_1	\dot{y}_2	M_1	M_2	M_{tot}	e
5	-5	1	-1	1	1	2	0.49

x_1	x_2	\dot{y}_1	\dot{y}_2	M_1	M_2	M_{tot}	e
5	-2.5	2	-1	1	2	3	0.42

x_1	x_2	\dot{y}_1	\dot{y}_2	M_1	M_2	M_{tot}	e
5	-0.5	10	-1	1	10	11	0.54

x_1	x_2	\dot{y}_1	\dot{y}_2	M_1	M_2	M_{tot}	e
5	-5	1	0.5	1	1	2	0.74*

x_1	x_2	\dot{y}_1	\dot{y}_2	M_1	M_2	M_{tot}	e
5	-5	4	1	1	1	2	0.15*

x_1	x_2	\dot{y}_1	\dot{y}_2	M_1	M_2	M_{tot}	e
5	-5	1	0.5	1	1	2	0.97*

5. L'étoile sur les valeurs des excentricités rappelle que les corps en jeu ne décrivent plus des ellipses.

FIGURE 2.9 – Système stable - vitesses sens opposé, même norme, masses identiques

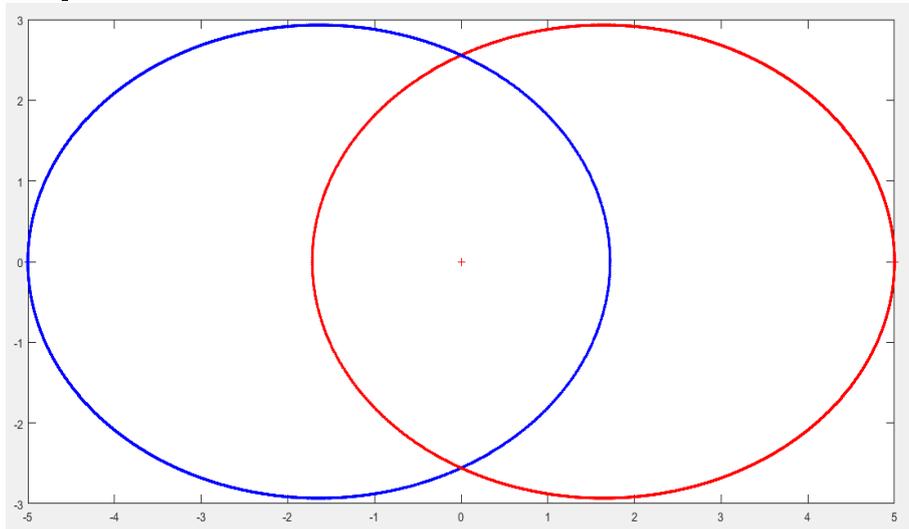


FIGURE 2.10 – Système stable - vitesses sens opposé, normes respectant le rapport des masses, masses différentes

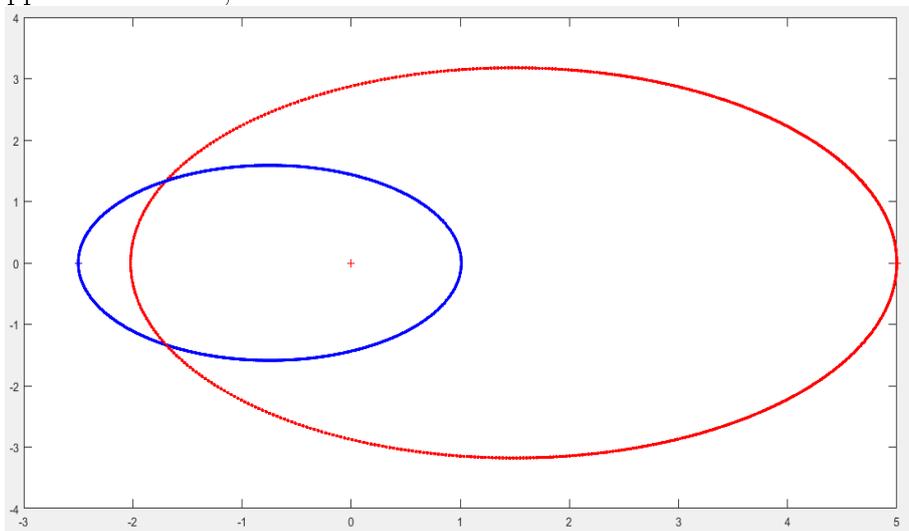


FIGURE 2.11 – Système stable - vitesses sens opposé, normes respectant le rapport des masses, limite d'une masse négligeable devant l'autre

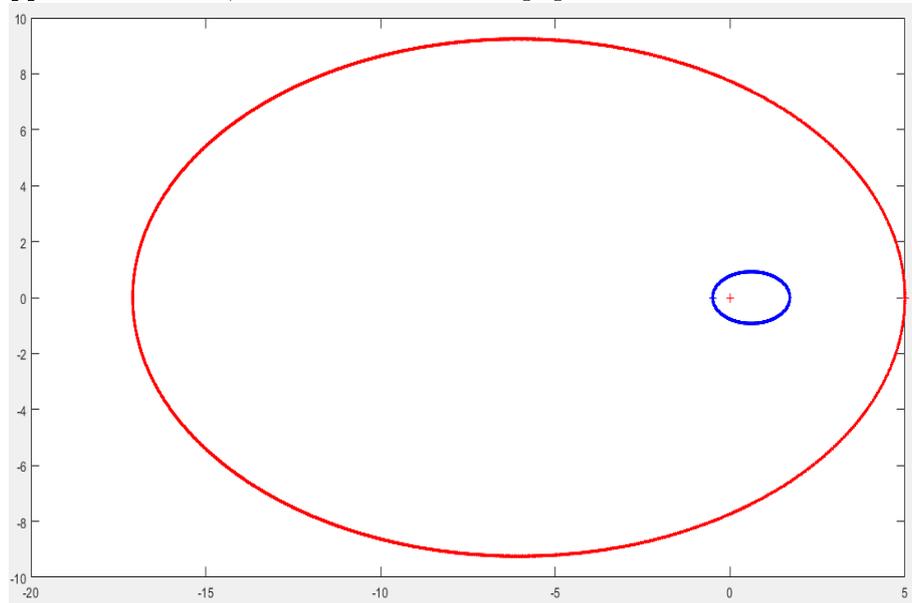


FIGURE 2.12 – Système pseudo-stable - vitesses sens opposé, normes ne respectant le rapport des masses, masses différentes

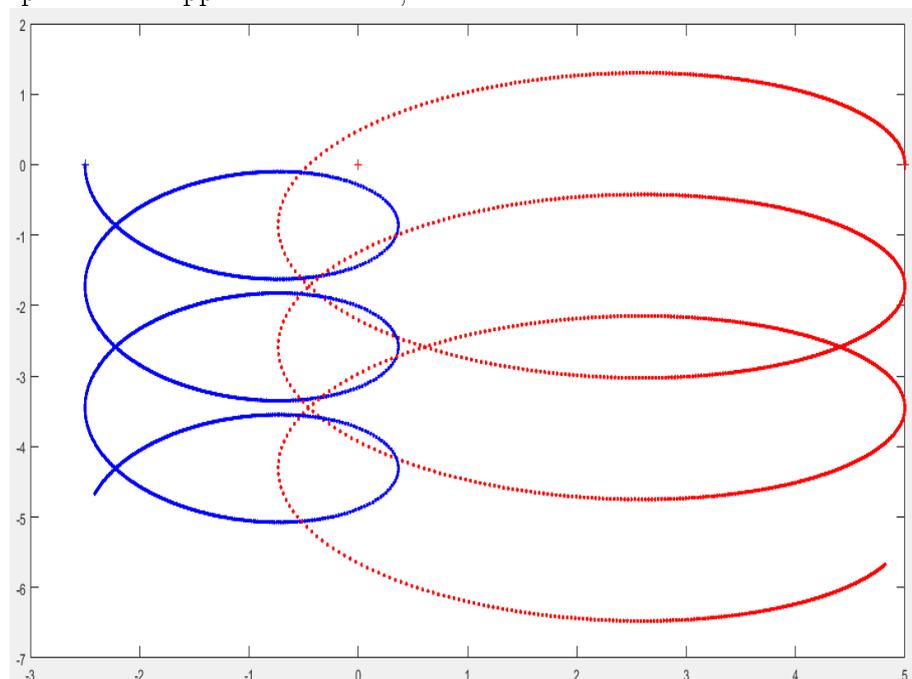


FIGURE 2.13 – Système pseudo-stable - vitesse même sens, normes différentes : coexistence

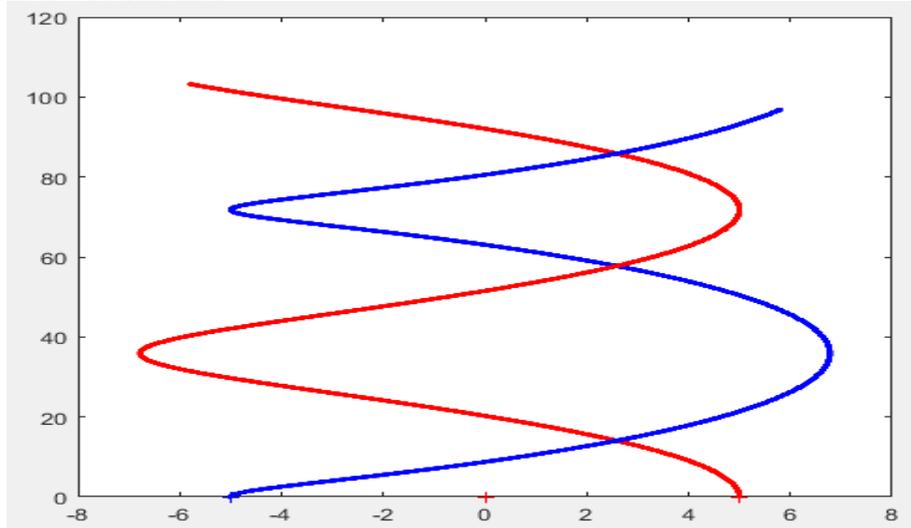
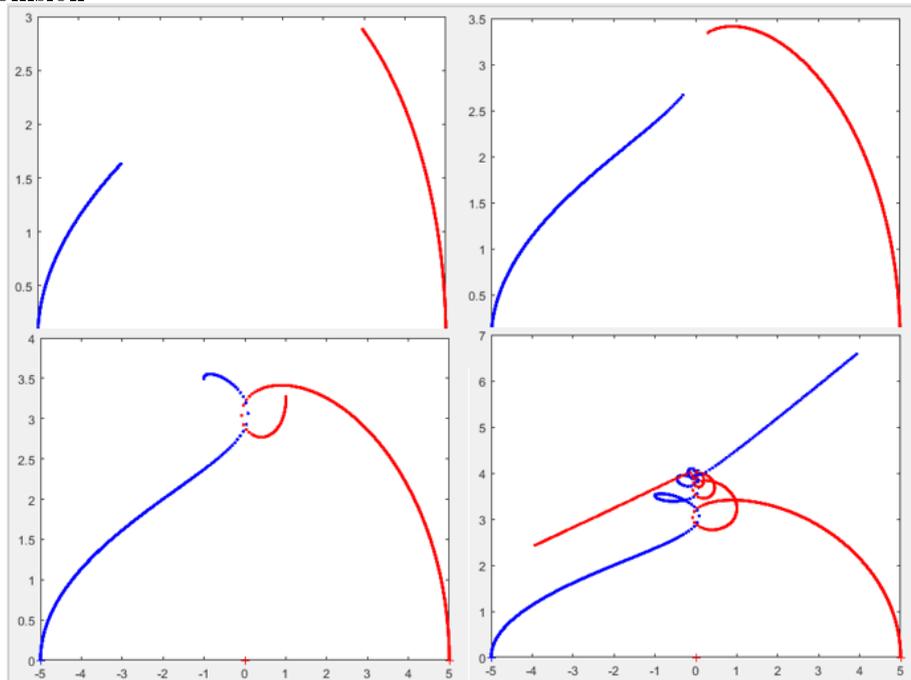


FIGURE 2.14 – Système instable - vitesses même sens, normes différentes : collision



Remarque 1 - La figure 2.11 montre que lorsque l'une des masses est négligeable devant l'autre, la plus grande masse est quasi-fixe pendant que la plus petite décrit une ellipse autour de cette dernière. Un tel système rappelle,

par exemple, ceux formés par la Terre avec ses nombreux satellites.

Remarque 2 - Nous observons que la seule donnée de la valeur de l'excentricité e fournie par la formule 2.12 ne permet pas de prédire avec exactitude le mouvement des deux corps.

Remarque 3 - Il faut veiller suivant la position des deux astres à leur donner une vitesse initiale suffisamment élevée pour ne pas observer une collision.

x_1	x_2	\dot{y}_1	\dot{y}_2	M_1	M_2	M_{tot}	e
1.05	-1.05	1	1	1	1	2	0.89*

x_1	x_2	\dot{y}_1	\dot{y}_2	M_1	M_2	M_{tot}	e
1.05	-1.05	3	3	1	1	2	0.03

FIGURE 2.15 – Système instable - collision

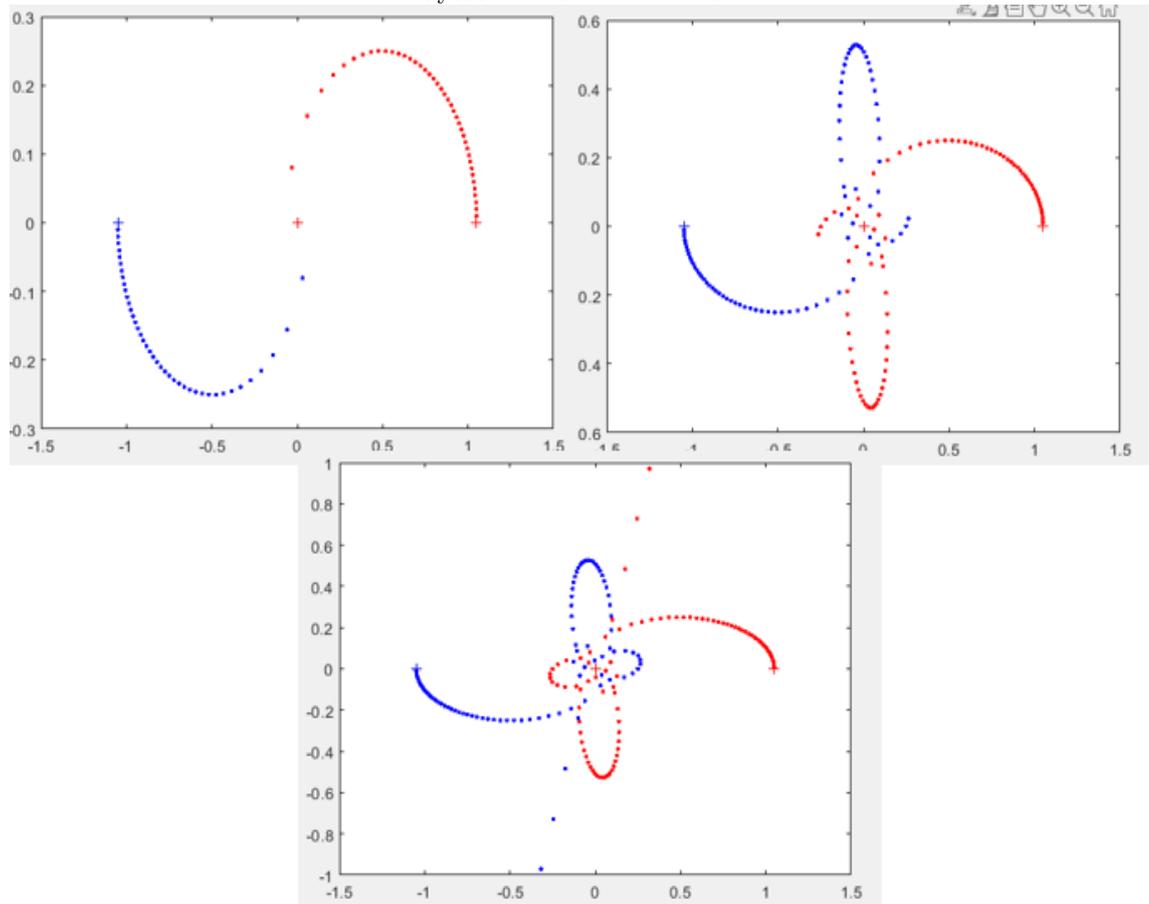
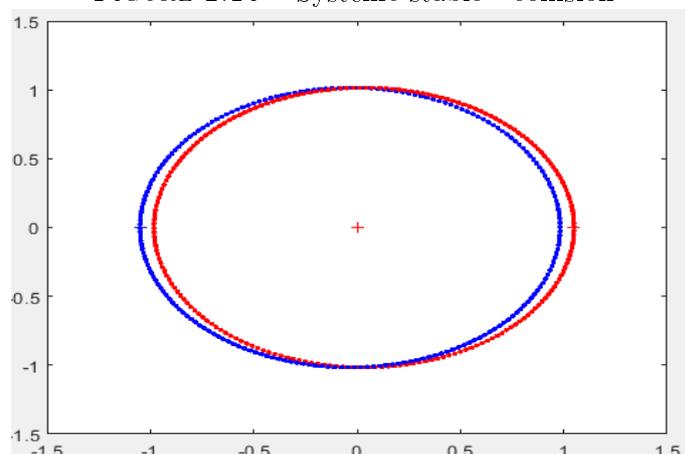


FIGURE 2.16 – Système stable - collision

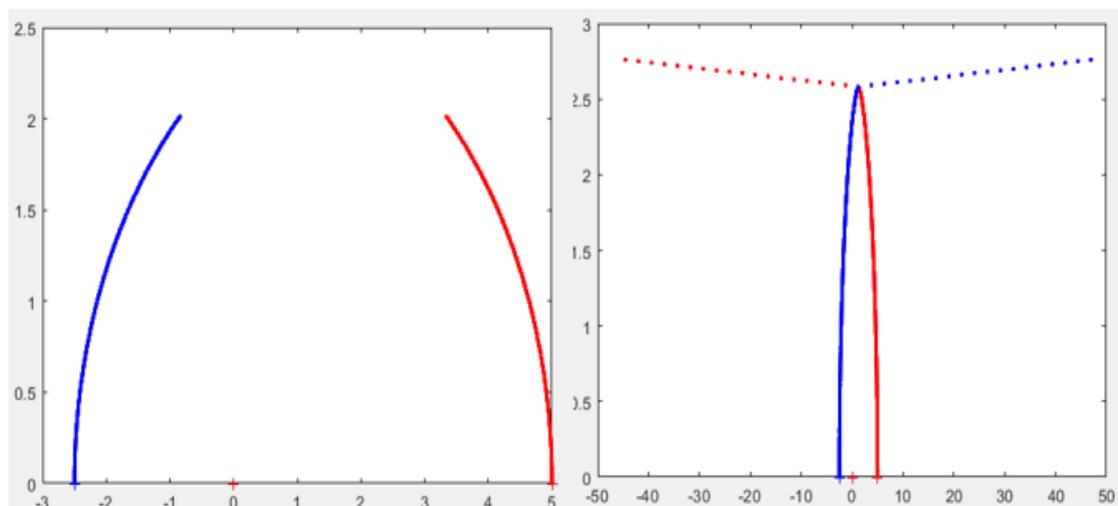


Deuxième cas : l'excentricité est égale à 1

Pour $e = 1$, les options sont très limitées : pour que cela se réalise, il faut les vecteurs vitesses des deux corps soient identiques, c'est-à-dire même direction même sens et même intensité. Dans ce cas, il y a toujours collision. Soient les caractéristiques suivantes du système à $t = 0$:

x_1	x_2	\dot{y}_1	\dot{y}_2	M_1	M_2	M_{tot}	e
5	-5	1	1	1	2	3	1

FIGURE 2.17 – Collision certaine lorsque $e = 1$



Troisième cas : l'excentricité est strictement supérieure à 1

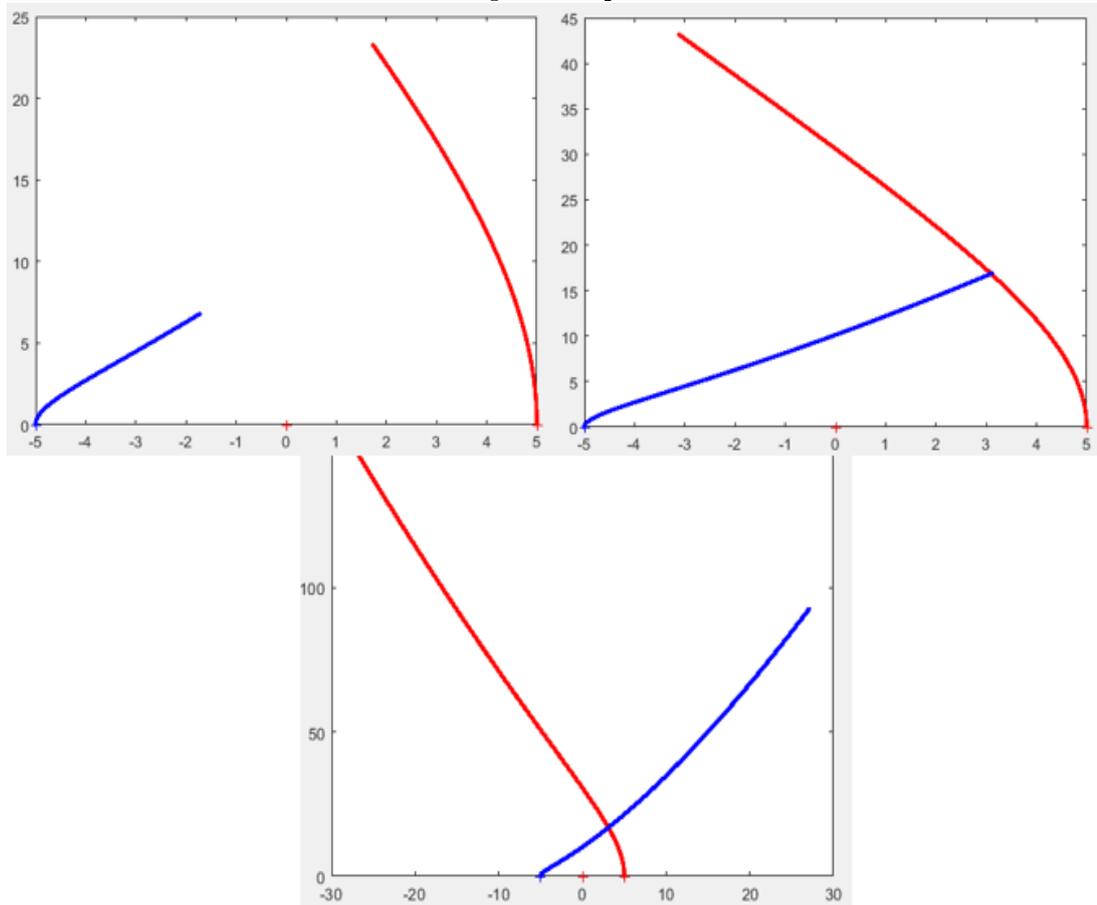
Pour obtenir $e > 1$, il faut que :

$$(x_1 - x_2)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 > 2GM_{tot} = 78.2$$

Soient les caractéristiques suivantes du système à $t = 0$:

x_1	x_2	\dot{y}_1	\dot{y}_2	M_1	M_2	M_{tot}	e
5	-5	6	1	1	1	2.19	1.04

FIGURE 2.18 – Éloignement pour $e > 1$



Chapitre 3

Problème à trois corps

“Live long and prosper !”

3.1 Paramétrage du problème

À un instant $t \neq 0$, le *USS Enterprise NCC 17-01* de masse m négligeable devant M_1 et M_2 apparaît en un point P_3 de coordonnées (x_3, y_3) et se rapproche par inadvertance des étoiles étudiées précédemment. Malheureusement, les moteurs du vaisseau tombent en panne et le vaisseau ne peut échapper par ses propres moyens à l’attraction du système stellaire. On rappelle que le point C est le centre de masse du sous-système indépendant¹ formé par les masses M_1 et M_2 . Dans l’étude qui va suivre, on le considère toujours comme l’origine du repère associé à notre référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

3.2 Étude dynamique

La masse de l’*Enterprise* étant négligeable, les interactions du système constitué de par ces trois corps se résument aux actions :

- du corps 1 sur le corps 2 ;
- du corps 2 sur le corps 1 ;
- du corps 1 sur l’enterprise ;
- du corps 2 sur l’enterprise ;

La présence de la masse m n’a aucune influence sur le mouvement d’ensemble des masses M_1 et M_2 . Ce mouvement est totalement prédictible et nous l’avons décrit dans le chapitre précédent. Reprenons donc le vecteur d’état X de la précédente étude dynamique et complétons le en un nouveau vecteur d’état Y . On a :

1. car m est négligeable

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}$$

D'après le *principe fondamental de la dynamique* :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{CP_3} &= F_{1 \rightarrow 3} + F_{2 \rightarrow 3} \\ &= -\frac{GmM_1}{\|\overrightarrow{P_1P_3}\|^3} \overrightarrow{P_1P_3} - \frac{GmM_2}{\|\overrightarrow{P_2P_3}\|^3} \overrightarrow{P_2P_3} \end{aligned} \quad (3.1)$$

donc, après simplification par m :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix} = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}} \begin{pmatrix} x_3-x_1 \\ y_3-y_1 \end{pmatrix} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}} \begin{pmatrix} x_3-x_2 \\ y_3-y_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix} = g(t, Y)$$

où :

$$g(t, Z) = \begin{array}{c} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ \frac{K_1}{\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_3-e_4)^2}}(e_1-e_2) \\ \frac{K_1}{\sqrt{(e_2-e_2)^2+(e_3-e_4)^2}}(e_3-e_4) \\ \frac{K_2}{\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_3-e_4)^2}}(e_2-e_1) \\ \frac{K_2}{\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_3-e_4)^2}}(e_4-e_3) \\ e_{11} \\ e_{12} \\ \frac{K_2}{\sqrt{(e_9-e_1)^2+(e_{10}-e_3)^2}}(e_9-e_1) + \frac{K_1}{\sqrt{(e_9-e_2)^2+(e_{10}-e_4)^2}}(e_9-e_2) \\ \frac{K_2}{\sqrt{(e_{10}-e_3)^2+(e_{10}-e_3)^2}}(e_{10}-e_3) + \frac{K_1}{\sqrt{(e_{10}-e_2)^2+(e_{10}-e_4)^2}}(e_{10}-e_4) \end{array}$$

et

$$K_1 = -GM_2, \quad K_2 = -GM_1, \quad Z = {}^t(e_1, e_2, \dots, e_8, e_9, \dots, e_{12})$$

Ouf! nous avons su mettre le système en équation, sous une forme qui nous est déjà familière : $\dot{Y} = g(t, Y)$. Pour son efficacité, nous avons effectué des simulations à l'aide de la méthode de *Runge-Kutta*².

Travaillons maintenant avec la contrainte $l = x_1 - x_2 = 2.1UA$. On pose $M_2 = rM_1$. Pour que le point C demeure l'origine de notre système de coordonnées, nous devons avoir :

$$0 = M_1x_1 + M_2x_2 = M_1(1+rx_2) = M_1(x_1+r(x_1-l)) = M_1x_1(1+r) - M_1rl$$

$$\text{soit : } x_1 = \frac{r}{1+r}l \text{ et } x_2 = -\frac{1}{1+r}l.$$

Voici un tracé de l'évolution du système pour les conditions initiales ci-dessous :

x_1	x_2	\dot{y}_1	\dot{y}_2	M_1	M_2	M_{tot}	e	x_3	y_3	\dot{x}_3	\dot{y}_3	m
1.05	-1.05	1	1	1	1	2	0.45	3	0	0	1	0.1

2. cf. étude dynamique, chapitre précédent

La figure en haut à droit sur la première ligne et celles sur la deuxième ligne représentent respectivement l'évolution au cours du temps des énergies potentielle, cinétique et mécanique de points P_3 .

FIGURE 3.1 – Problème à 3 corps en 2D

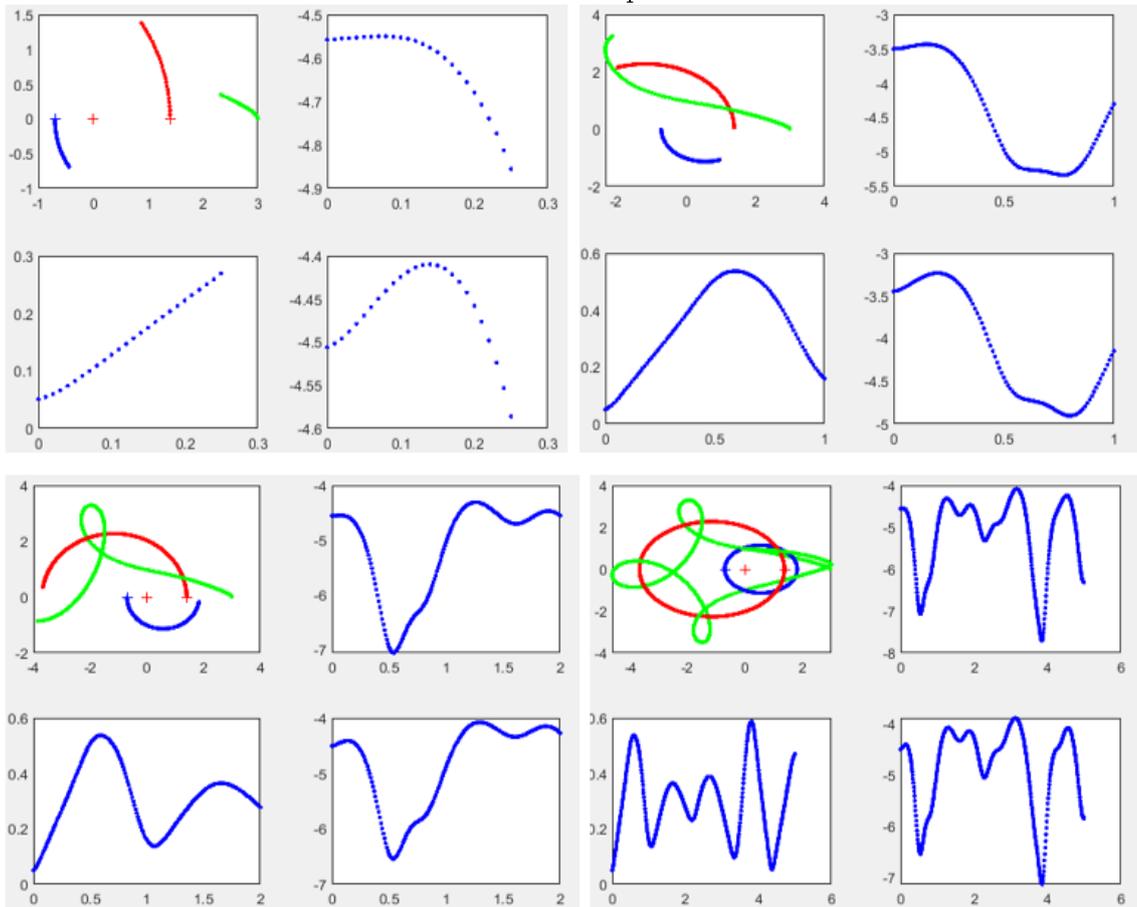
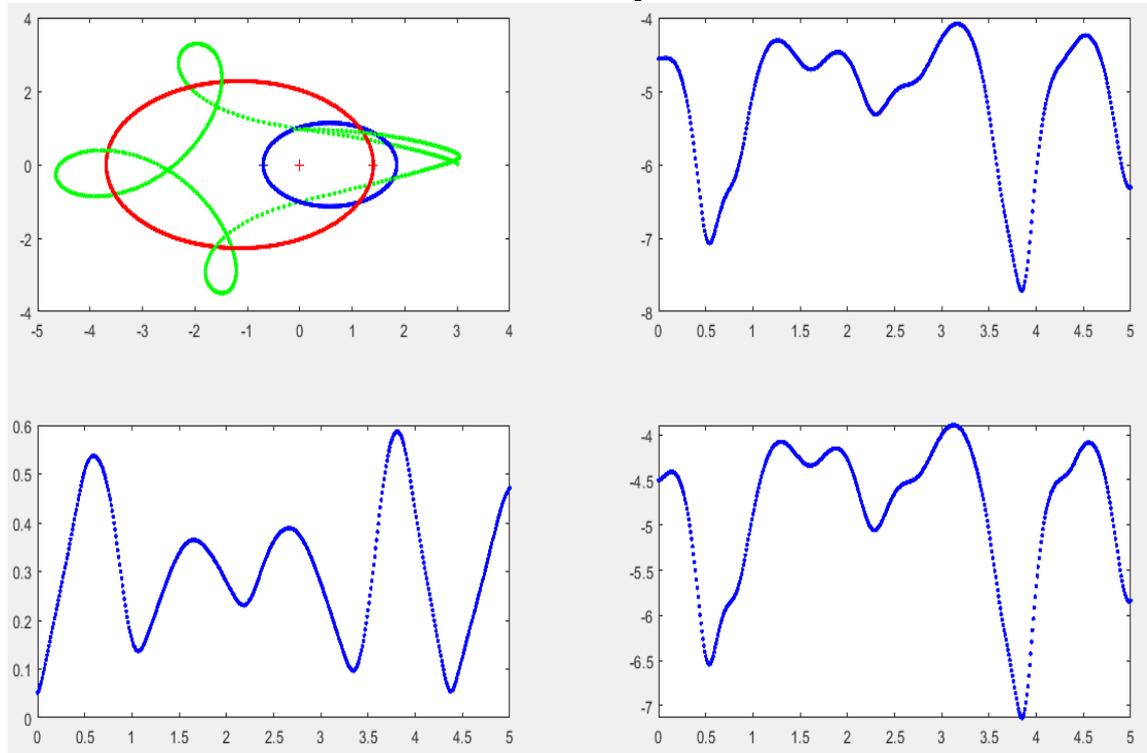


FIGURE 3.2 – Problème à 3 corps en 2D



3.3 Passage en 3D

Nous nous proposons maintenant une étude 3D du problème à trois corps. La masse m étant toujours négligeable, elle n'influe pas sur le mouvement des masses M_1 et M_2 : de ce fait leur mouvement est contenu dans le plan (x, y) . On suppose maintenant que l'*Enterprise* apparaît sur l'axe orthogonal au plan des deux étoiles en leur centre de masse avec une vitesse V . La mise en équation du problème reste la même, il suffit d'ajouter les coordonnées z_3 et \dot{z}_3 de position et de vitesse du point matériel P_3 de masse m suivant l'axe \vec{u}_z . Précisons qu'il est inutile d'introduire les coordonnées et vitesses des points P_1 et P_2 suivant cet axe car elles sont nécessairement nulles.

On considère donc cette fois un vecteur d'état Z défini par :

$$Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ z_3 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix}$$

Il vérifie $\dot{Z} = h(t, Z)$ avec :

$$h(t, Z) = \begin{pmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ \frac{K_1}{\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_3-e_4)^2}}(e_1-e_2) \\ \frac{K_1}{\sqrt{(e_2-e_2)^2+(e_3-e_4)^2}}(e_3-e_4) \\ \frac{K_2}{\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_3-e_4)^2}}(e_2-e_1) \\ \frac{K_2}{\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_3-e_4)^2}}(e_4-e_3) \\ e_{11} \\ e_{12} \\ \frac{K_2}{\sqrt{(e_9-e_1)^2+(e_{10}-e_3)^2+e_{13}^2}}(e_9-e_1) + \frac{K_1}{\sqrt{(e_9-e_2)^2+(e_{10}-e_4)^2+e_{13}^2}}(e_9-e_2) \\ \frac{K_2}{\sqrt{(e_{10}-e_3)^2+(e_{10}-e_3)^2+e_{13}^2}}(e_{10}-e_3) + \frac{K_1}{\sqrt{(e_{10}-e_2)^2+(e_{10}-e_4)^2}}(e_{10}-e_4) \\ e_{14} \\ \frac{K_2}{\sqrt{(e_{10}-e_3)^2+(e_{10}-e_3)^2+e_{13}^2}}e_{13} + \frac{K_1}{\sqrt{(e_{10}-e_2)^2+(e_{10}-e_4)^2+e_{13}^2}}e_{13} \end{pmatrix}$$

et

$$K_1 = -GM_2, \quad K_2 = -GM_1, \quad Z = {}^t(e_1, e_2, \dots, e_8, e_9, \dots, e_{12}, e_{13}, e_{14})$$

Que Runge-Kutta fasse le reste !

3.4 Sauvons l'Enterprise

Pour que l'*Enterprise* échappe à un sort funeste, il faudrait que son énergie cinétique à l'état initiale soit supérieure à son énergie potentielle en valeur

absolue. À $t = 0$, pour $M_1 = M_2 = M$, $l = x_1 - x_2$ et P_3 sur l'axe \vec{u}_z :

$$E_p = -GmM \left(\frac{1}{r_{1,3}} + \frac{1}{r_{2,3}} \right)$$

avec : $r_{1,3} = r_{2,3} = \sqrt{z_3^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

donc :

$$v \geq v_m = \sqrt{\frac{4GM}{\sqrt{z_3^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}}$$

x_1	x_2	\dot{y}_1	\dot{y}_2	M_1	M_2	M_{tot}	e	x_3	y_3	\dot{x}_3	\dot{y}_3	m	z_3	\dot{z}_3
1	-1	3	-3	1	1	2	0.45	0	0	0	0	...	4.3	1

Dans les figures suivantes, nous représentons les trajectoires décrites par l'Enterprise et les étoiles, ainsi que les variations de la vitesse de l'Enterprise au cours du temps. Dans nos conditions initiales, la vitesse de libération est de $5,952UA.an^{-1}$.

FIGURE 3.3 – Cas où la vitesse initiale est insuffisante.

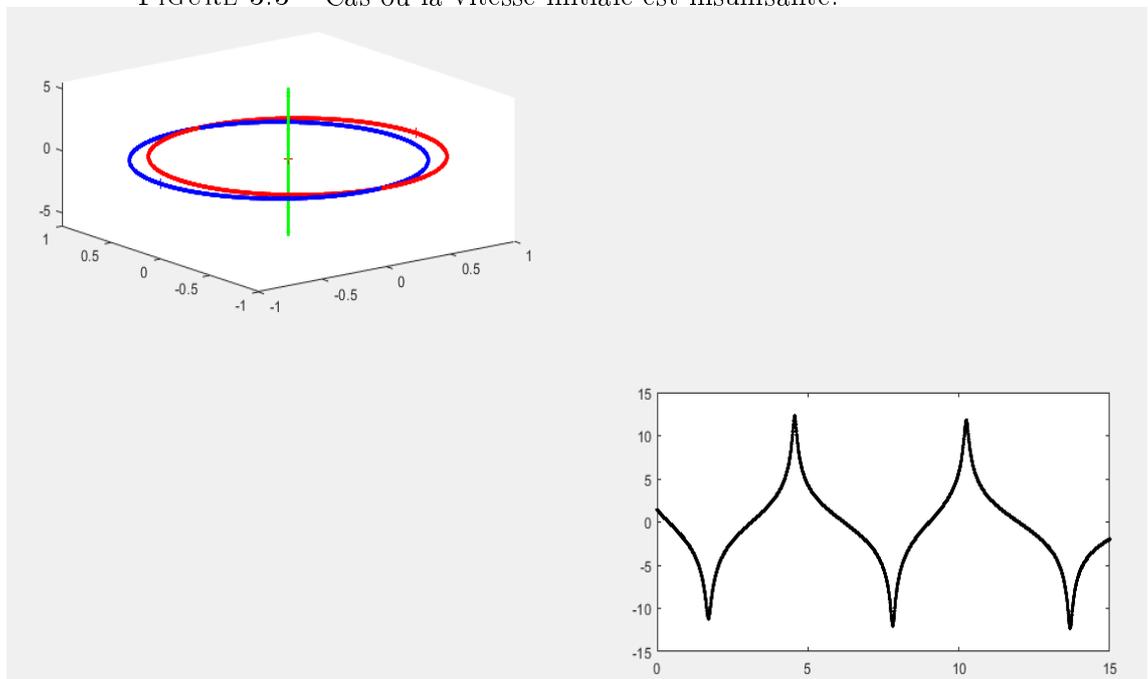
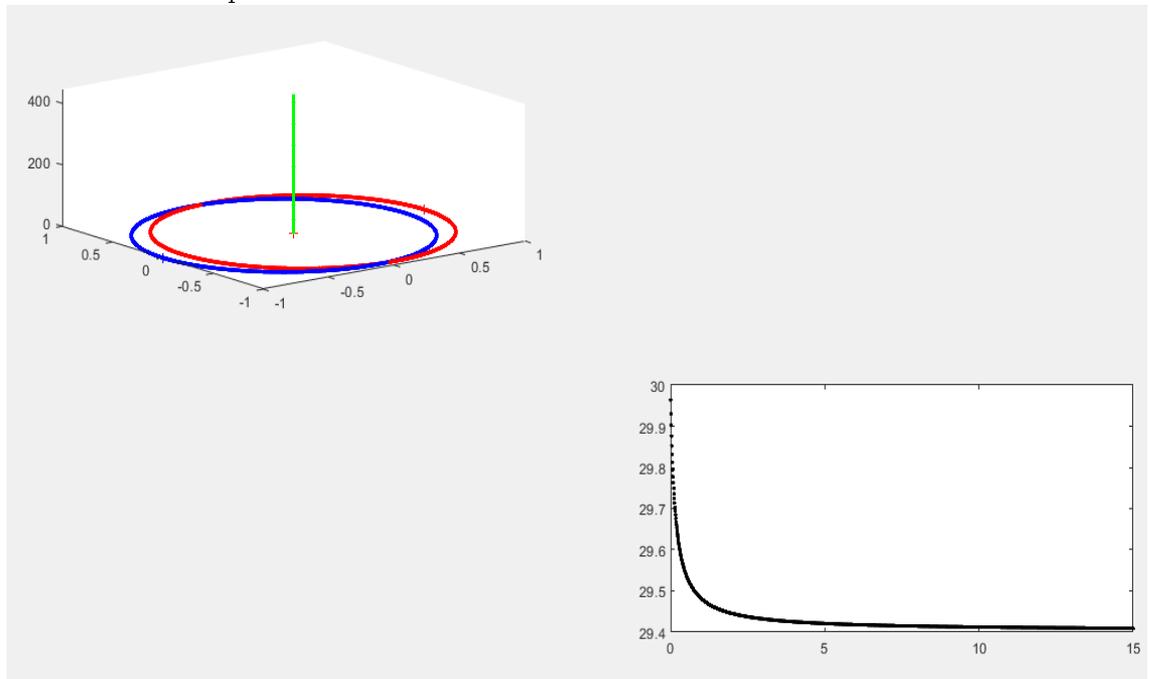


FIGURE 3.4 – Cas où la vitesse initiale est largement supérieure à la vitesse libératrice théorique.



En assignant une vitesse initiale élevée, le vaisseau arrive à s'échapper de l'attraction du système.

Quand la vitesse initiale est proche de la vitesse de libération, il est plus difficile d'interpréter la courbe de vitesse sur cette durée.

FIGURE 3.5 – Cas où la vitesse initiale est proche de la vitesse libératrice théorique ($v=6$).

